XVI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

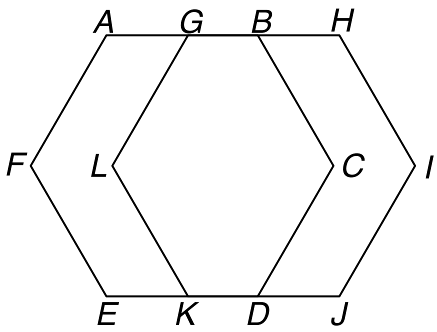
19 de noviembre de 2016

<u>PRUEBA POR EQUIPOS</u> 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. El cuadrado de la figura es mágico respecto del producto, es decir, el producto de los tres números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es el mismo. Si en ninguna casilla hay un cero, complétalo.

	32	
16	8	

2. Los hexágonos regulares *ABCDEF* y *GHIJKL* de la figura son iguales siendo la longitud de cada lado 24 cm. Estos hexágonos se solapan pues *G* está en el lado *AB, B* está en *GH*, *K* en *DE* y *D* en *JK*. Si el área del hexágono *GBCDKL* es la mitad de la del *ABCDEF*, calcula la longitud *FL*.



3. Escribe todas las parejas de números de dos cifras, de la forma [*ab*] y [*ac*] tales que la suma de sus cuadrados sea 1313.

XVI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2016

PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. Completa el siguiente “crucinúmeros”. Cada uno de los tres números en horizontal es un número de cuatro cifras (Ninguno empieza por cero).

	1V	2V	3V	4V
1H				
2H				
3H				

1H: Cubo de la suma de las cifras de 1V

2H: Sus cifras, de izquierda a derecha, están en orden estrictamente decreciente

3H: Sus cifras, de izquierda a derecha, están en orden estrictamente decreciente

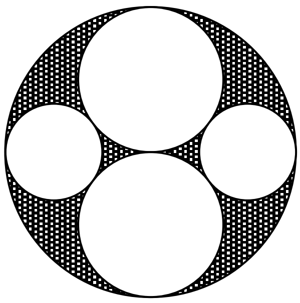
1V: Cuarta potencia de un número entero

2V: Cuadrado perfecto

3V: Sus cifras están en progresión geométrica

4V: Uno de sus factores primos es un número de dos cifras.

2. En la figura se observan cinco circunferencias tangentes entre sí: dos pequeñas iguales, dos medianas también iguales y una grande. Si el radio de la circunferencia grande es $\frac{30}{\sqrt{\pi}}$, calcula el área sombreada.



3. Encuentra el mayor número de cuatro cifras que es igual a la suma de los factoriales de sus centenas, decenas y unidades.

XVI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2016

PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1. Encuentra todos los números primos p para los que $p^2 + 21p - 1$ es también un número primo.

2. La función $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 4x - 4}$ es negativa en dos intervalos de $\mathbb{R}$. Calcula la suma de las longitudes de estos intervalos.

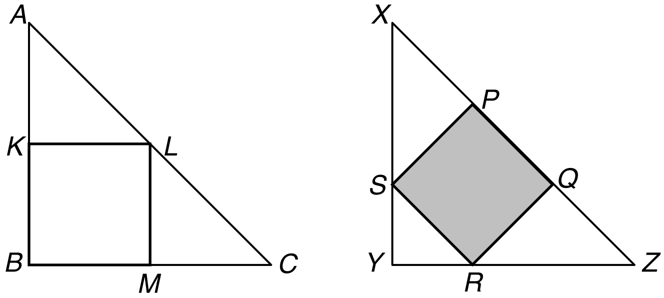
3. Calcula el menor entero positivo t que verifica la ecuación $2^{13} + 2^{10} + 2^x = t^2$ en la que x es un entero positivo.

XVI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2016

PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

1. En la figura se observan dos triángulos rectángulos isósceles iguales, *ABC* y *XYZ* y dos cuadrados *KLMB* y *PQRS*. Si el área del cuadrado *KLMB* es 189, ¿cuál es el área del cuadrado *PQRS*?

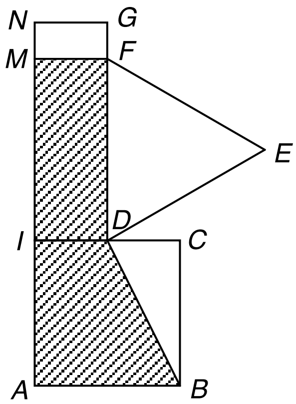


2. En un edificio de apartamentos la mitad de las ventanas tienen cortinas, la cuarta parte de las ventanas tienen macetas con flores y la sexta parte tienen cortinas y macetas con flores. Hay 375 ventanas que no tienen ni cortinas ni macetas con flores. Por otra parte sabemos que un quinto de los apartamentos tienen 5 ventanas, dos quintos de los apartamentos tienen 3 ventanas y el resto tienen 2 ventanas. ¿Cuántos apartamentos tiene el edificio?

3. ¿Cuántos números, de los cien primeros enteros positivos, verifican que sus inversos tienen un desarrollo decimal periódico?

4. El rectángulo *DGNI*, el cuadrado *ABCI* y el triángulo equilátero *DEF* tienen 24 cm de perímetro cada uno de ellos. *D* es el punto medio de *IC* y *MF* es paralelo a *NG*.

a) ¿Cuál es el área de la figura sombreada de vértices *ABDFM*?
b) ¿Cuál es el perímetro de la figura de vértices *ABCDEFGN*?



XVI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2016

PRUEBA INDIVIDUAL 3º y 4º de E.S.O. (90 minutos)

1. ¿Cuántos enteros positivos, menores que 2016, pueden escribirse como diferencia de dos cuadrados perfectos?

2. En un hexágono regular de lado 1 consideramos los veinte triángulos cuyos vértices son vértices del hexágono. Calcula la media de las áreas de estos veinte triángulos.

3. Un fabricante de tres productos, de precios unitarios 50, 65 y 70 €, recibe un pedido de 100 unidades por un total de 6850 € con la condición de que envíe el máximo número posible del producto más caro. ¿Cuántas unidades de cada producto debe enviar?

4. Los cinco hermanos Pérez se llevan muy bien y han pasado un verano bastante entretenido. Cada uno de los seis días de la semana, de lunes a sábado, cuatro de ellos hacían una determinada actividad siendo 38, 35, 36, 36, 38 y 39 la suma de las edades de los cuatro. Si ninguno estuvo los seis días, averigua las edades de cada uno de los cinco.

XVI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2016

PRUEBA INDIVIDUAL **Bachillerato** (90 minutos)

1. Demuestra que en cualquier triángulo rectángulo la suma de los inversos de las longitudes de los catetos es igual al inverso de la distancia del pie de la bisectriz del ángulo recto a cualquiera de los catetos.

2. Las ecuaciones $x^3 + Ax + 10 = 0$ y $x^3 + Bx^2 + 50 = 0$ tienen dos raíces comunes. Calcula el producto de estas dos raíces comunes.

3. En una reunión de afectados por un accidente nuclear, cada uno de los asistentes tiene 3, 4, 5, 6 ó 7 dedos en cada mano, siendo $p(k) = \dfrac{2^{2-|5-k|}}{10}$ la probabilidad de tener k dedos en una mano. Si el número de dedos en la mano izquierda es independiente del número de dedos en la mano derecha, calcula la probabilidad de que un asistente elegido al azar tenga al menos 10 dedos entre ambas manos.

4. ¿Cuántos enteros no negativos x verifican la ecuación $\left[\dfrac{x}{44}\right] = \left[\dfrac{x}{45}\right]$?

(Recuerda: $[a]$ es la parte entera de a, es decir, el mayor entero menor o igual que a)

XVIConcurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2016

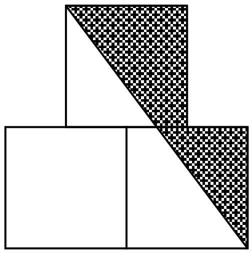
PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

1º y 2º de ESO.-

1A.- Los puntos *P, Q, R* y *S* están alineados en ese orden. Si PR = 15 cm, QS = 12 cm y PS = 20 cm, calcula, en cm, la distancia entre *Q* y *R*.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B



En la figura adjunta se observan tres cuadrados iguales de lado $\frac{T}{7}$ cm y tal que el punto medio del lado inferior del cuadrado de arriba es un vértice de los de abajo. ¿Cuántos cm^2 tiene el área sombreada?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.

Isa y Alicia parten al mismo tiempo de dos puntos diametralmente opuestos de una pista circular y corren a distintas velocidades y en sentido contrario. Cuando se encuentran la primera vez Alicia ha recorrido *T* metros y, desde ese momento y hasta que se encuentran por segunda vez, Isa ha recorrido $\frac{3T}{2}$ metros. Si sus velocidades son constantes, ¿cuál es la longitud, en metros, de la pista?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

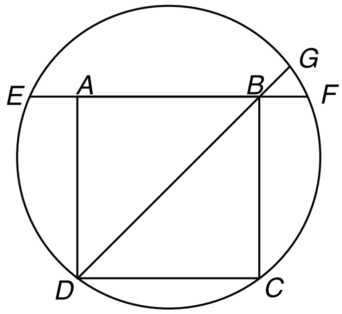
XVI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2016

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

3º y 4º de ESO.-

.



2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.
En la figura adjunta observas un cuadrado *ABCD*, de lado *T*, dos de cuyos vértices, *C* y *D*, están en una circunferencia. Si la cuerda *EF* tiene longitud 98 y la cuerda *DG* pasa por *B*, calcula *BG*.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

2B.- Hoy es el cumpleaños de tres chicos cuya suma de edades es 44 años. ¿Cuál será la suma de sus edades la próxima vez que dicha suma vuelva a ser un número con dos cifras iguales?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.
Calcula el área del trapecio limitado por los ejes de coordenadas y las rectas $x + y = T$, $x + y = T - 10$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

XVI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2016

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

Bachillerato.-

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.
Considera los diez enteros positivos más pequeños que puedas, de forma que haya exactamente T divisibles entre T, y exactamente $T-2$ divisibles entre $T-2$. ¿Cuál es el mayor de los diez números?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B y k la suma de las cifras de T.
En un triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es k veces la longitud de la altura sobre ella. Calcula el cociente entre las longitudes del mayor y el menor de los segmentos en que dicha altura divide a la hipotenusa.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- Si a, b y c son enteros positivos con $a + b + c = 7$, calcula el menor valor posible para $a^2 + b^2 + c^2$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

XVI Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

19 de noviembre de 2016

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. El cuadrado de la figura es mágico respecto del producto, es decir, el producto de los tres números de cada fila, de cada columna y de cada diagonal es el mismo. Si en ninguna casilla hay un cero, complétalo.

	32	
16	8	

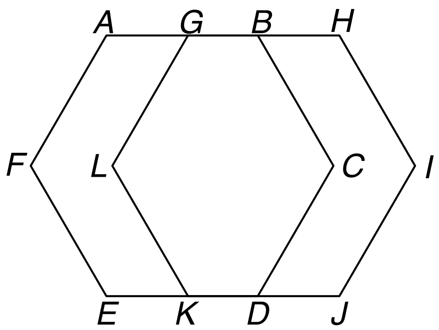
a	*b*	*c*
d	32	*e*
16	8	*f*

$16\cdot 8\cdot f = a\cdot 32\cdot f \Rightarrow a = 4$. $4\cdot b\cdot c = 8\cdot 32\cdot b \Rightarrow c = 64$

La constante del cuadrado es $k = 16\cdot 32\cdot 64 = 2^{15} = 32\,768$

Se completan los demás y resulta $b = 2^7 = 128$; $d = 2^9 = 512$; $e = 2$; $f = 2^8 = 256$.

2. Los hexágonos regulares *ABCDEF* y *GHIJKL* de la figura son iguales siendo la longitud de cada lado 24 cm. Estos hexágonos se solapan pues *G* está en el lado *AB, B* está en *GH*, *K* en *DE* y *D* en *JK*. Si el área del hexágono *GBCDKL* es la mitad de la del *ABCDEF*, calcula la longitud *FL*.



Los trapecios *FCBA* y *LCBG* son, respectivamente, la mitad de los hexágonos *FEDCBA* y *LKDCBG* y como los trapecios tienen la misma altura, la base media del trapecio *LCBG* tiene que ser la mitad de la base media del *FCBA*. Además *FL = AG.*

$$\frac{LC+GB}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{FC+AB}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{48-FL+24-FL}{2} = \frac{48+24}{4} = 18 \Leftrightarrow 36-FL = 18 \Leftrightarrow FL = 18$$

3. Escribe todas las parejas de números de dos cifras, de la forma $[ab]$ y $[ac]$ tales que la suma de sus cuadrados sea 1313.

La primera cifra, *a*, debe ser 2, puesto que $20^2 + 21^2 < 1313 < 30^2 + 31^2$.
Por lo tanto, $[2b]^2 + [2c]^2 = (20 + b)^2 + (20 + c)^2 = 1313 \Rightarrow 40(b + c) + b^2 + c^2 = 513$.
Como $40(b + c)$ termina en cero, $b^2 + c^2$ tiene que terminar en 3 y han de ser de distinta paridad. Si *b* es par *c* es impar, o viceversa y las terminaciones de b^2 y c^2 deben ser 0, 4 ó 6 y 1, 9 ó 5, respectivamente y la única suma que termina en 3 es 4 + 9 = 13.
b debería ser o bien 2 o bien 8 y *c,* 3 ó 7.
Si $b = 2$ y $c = 3$, $22^2 + 23^2 = 1013 \neq 1313$. Si $b = 2$ y $c = 7$, $22^2 + 27^2 = 1213 \neq 1313$.
Si $b = 8$ y $c = 3$, $28^2 + 23^2 = 1313$, solución buscada. Si $b = 8$ y $c = 7$, $28^2 + 27^2 = 1513 \neq 1313$.
Por lo tanto la única pareja de números es $[ab] = 28$ y $[ac] = 23$.

PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. Completa el siguiente “crucinúmeros”. Cada uno de los tres números en horizontal es un número de cuatro cifras (Ninguno empieza por cero).

	1V	2V	3V	4V
1H				
2H				
3H				

1H: Cubo de la suma de las cifras de 1V

2H: Sus cifras, de izquierda a derecha, están en orden estrictamente decreciente

3H: Sus cifras, de izquierda a derecha, están en orden estrictamente decreciente

1V: Cuarta potencia de un número entero

2V: Cuadrado perfecto

3V: Sus cifras están en progresión geométrica

4V: Uno de sus factores primos es un número de dos cifras.

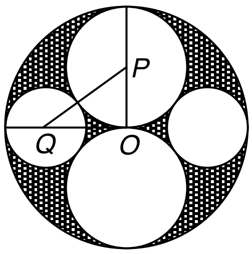
1V. ¿Cuántas cuartas potencias de números enteros tienen cuatro cifras? Solo $4^4 = 256$ y $5^4 = 625$. En ambos casos la suma de sus cifras es 13 y como $13^3 = 2197$, ya tenemos 1H y 1V.

2	1	9	7
5			
6			

Ahora ya 3V. debe ser 931 y 3H. 543□, por lo que 2V. es 144 y 3H. 6410.
Para 2H. hay tres posibilidades: 5432, 5431 y 5430, pero $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$ no tienen divisor primo de dos cifras, sin embargo $710 = 2 \cdot 5 \cdot 71$.
La solución es:

2	1	9	7
5	4	3	1
6	4	1	0

2. En la figura se observan cinco circunferencias tangentes entre sí: dos pequeñas iguales, dos medianas también iguales y una grande. Si el radio de la circunferencia grande es $\dfrac{30}{\sqrt{\pi}}$, calcula el área sombreada.



Si llamamos r al radio de la circunferencia pequeña, como el radio de la mediana es la mitad de la grande, es decir, $R = \dfrac{15}{\sqrt{\pi}}$, en el triángulo rectángulo OPQ tenemos:

$$OQ^2 + OP^2 = QP^2 \Rightarrow \left(\frac{30}{\sqrt{\pi}} - r\right)^2 + \left(\frac{15}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = \left(\frac{15}{\sqrt{\pi}} + r\right) \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{r}{\sqrt{\pi}} = \frac{30}{\pi} = r = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$$

Hallamos la superficie de los círculos.

Círculo grande $S_{grande} = \pi\left(\dfrac{30}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 900$. Círculo mediano $S_{mediano} = \pi\left(\dfrac{15}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 225$

Círculo pequeño $S_{pequeño} = \pi\left(\dfrac{10}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 100$

Área de la superficie sombreada $S = 900 - 2 \cdot 225 - 2 \cdot 100 = 250$.

3. Encuentra el mayor número de cuatro cifras que es igual a la suma de los factoriales de sus centenas, decenas y unidades.

El mayor factorial de 4 cifras es 7! = 5040. No puede haber otro 7 ya que 7! + 7! > 9999.
6! = 720 y como 7! + 6! = 5760.
Solo quedan dos posibilidades para la última cifra, 1 ó 2, ya que 1! = 1 y 2! = 2, pero como es el mayor número se toma el 2.
Así 5762 = 7! + 6! + 2! Y este es el número buscado.

PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1. Encuentra todos los números primos p para los que $p^2 + 21p - 1$ es también un número primo.

Probamos con los primeros números primos. Sea $P = p^2 + 21p - 1$
Si $p = 2$, $P(2) = 4 + 42 - 1 = 45$ múltiplo de 3
Si $p = 3$, $P(3) = 9 + 63 - 1 = 71$ primo
Si $p = 5$, $P(5) = 25 + 105 - 1 = 129$ múltiplo de 3
Si $p = 7$, $P(7) = 49 + 147 - 1 = 195$ múltiplo de 3
Si $p = 11$, $P(11) = 121 + 231 - 1 = 351$ múltiplo de 3
Si $p = 13$, $P(13) = 169 + 273 - 1 = 441$ múltiplo de 3
Parece ser que siempre resulta un múltiplo de 3 si $p > 3$.
Sea p de la forma $p = 3k + 1$, entonces $P(p) = (3k+1)^2 + 21(3k+1) - 1 = 3h + 1 + 3t - 1 = 3(h+t)$ múltiplo de 3
Si $p = 3k - 1$, entonces $P(p) = (3k-1)^2 + 21(3k-1) - 1 = 3h' + 1 + 3t' - 1 = 3(h' + t')$ múltiplo de 3
Luego el único número primo p, es $p = 3$.

2. La función $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 4x - 4}$ es negativa en dos intervalos de $\mathbb{R}$. Calcula la suma de las longitudes de estos intervalos.

Raíces del numerador: $x^4 + 3x^3 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2 + 3x - 4\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -4 \\ x_3 = 1 \end{cases}$

Raíces del denominador: $x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x_{4,5} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{32}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$.

Signo de $f(x)$.

	x_5		x_2		x_1		x_4		x_3	
+		−		+		+		−		+

La función es negativa en los intervalos $(x_5, x_2) \cup (x_4, x_3)$ cuya suma de amplitudes es:
$x_2 - x_5 + x_3 - x_4 = -4 - \left(-2 - 2\sqrt{2}\right) + 1 - \left(-2 + 2\sqrt{2}\right) = 1$

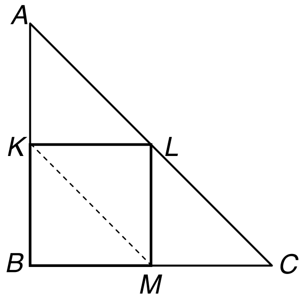
3. Calcula el menor entero positivo t que verifica la ecuación $2^{13} + 2^{10} + 2^x = t^2$ en la que x es un entero positivo.

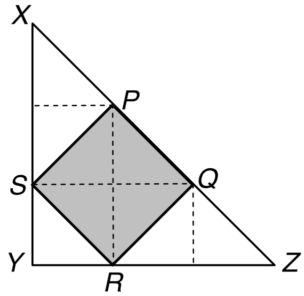
$2^{13} + 2^{10} + 2^x = t^2 \Leftrightarrow 2^{10}\left(2^3 + 1\right) + 2^x = t^2 \Leftrightarrow 2^x = t^2 - 2^{10} \cdot 3^2 = (t + 96)(t - 96) \Rightarrow$ tanto $t + 96$ como $t - 96$ tienen que ser potencias de 2.

$\left.\begin{array}{l} t + 96 = 2^m \\ t - 96 = 2^n \end{array}\right\} \Rightarrow 192 = 2^m - 2^n \Rightarrow 3 \cdot 2^6 = 2^m - 2^n \Rightarrow 3 = 2^{m-6} - 2^{n-6}$. La única diferencia de dos potencias de 2 que resulta igual a 3 es, $2^2 - 2^0 = 4 - 1 = 3$. Por lo tanto $m - 6 = 2$ y $n - 6 = 0$, de donde $m = 8$, $n = 6$.
El valor de t es: $t = 2^8 - 96 = 160$ o, lo que es lo mismo, $t = 2^6 + 96 = 160$.

<u>PRUEBA INDIVIDUAL</u> 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

1. En la figura se observan dos triángulos rectángulos isósceles iguales, *ABC* y *XYZ* y dos cuadrados *KLMB* y *PQRS*. Si el área del cuadrado *KLMB* es 189, ¿cuál es el área del cuadrado *PQRS*?





Trazando los segmentos punteados se deduce que el área del triángulo *ABC* es el doble del cuadrado *KLMB*, es decir, 2·189 = 378. Igualmente el área del cuadrado *PQRS* es:

$$S_{PQRS} = \frac{4}{9}S_{XYZ} = \frac{4}{9}S_{ABC} = \frac{4}{9}\cdot 378 = 168$$

2. En un edificio de apartamentos la mitad de las ventanas tienen cortinas, la cuarta parte de las ventanas tienen macetas con flores y la sexta parte tienen cortinas y macetas con flores. Hay 375 ventanas que no tienen ni cortinas ni macetas con flores. Por otra parte sabemos que un quinto de los apartamentos tienen 5 ventanas, dos quintos de los apartamentos tienen 3 ventanas y el resto tienen 2 ventanas. ¿Cuántos apartamentos tiene el edificio?

Llamando: *C* = "conjunto de ventanas con cortinas" *M* = "conjunto de ventanas con macetas"
V = "conjunto de ventanas" *A* = "conjunto de apartamentos"

Cardinal de *C* = *c*. Cardinal de *M* = *m*. Cardinal de *V* = *v*. Cardinal de *A* = *a*.

$c = \frac{1}{2}v$, $m = \frac{1}{4}v$ Cardinal de ($C \cap M$) = $\frac{1}{6}v$

Cardinal de ($C \cup M$) = Cardinal de *C* + Cardinal de *M* – Cardinal de ($C \cap M$) = $\frac{1}{2}v + \frac{1}{4}v - \frac{1}{6}v = \frac{7}{12}v$

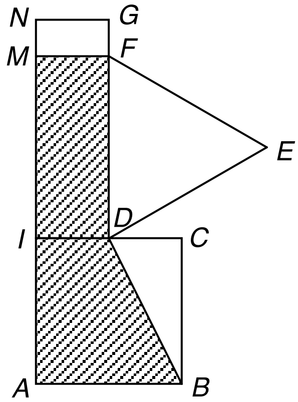
Como las ventanas restantes son 375, entonces $\frac{5}{12}v = 375 \Rightarrow v = 900$. Hay 900 ventanas.

$900 = 5\cdot\frac{1}{5}a + 3\cdot\frac{2}{5}a + 2\cdot\frac{2}{5}a = 3a \Rightarrow a = 300$. Hay 300 apartamentos.

3. ¿Cuántos números, de los cien primeros enteros positivos, verifican que sus inversos tienen un desarrollo decimal periódico?

Las fracciones que tienen un desarrollo decimal periódico son aquellas, que una vez simplificadas, tienen un denominador con divisores primos distintos a 2 y a 5.
Hay 15 enteros positivos entre los 100 primeros que tienen únicamente como divisores primos el 2 y el 5, en concreto: 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 64, 80, 100 y además el 1.
Por lo tanto hay 85 que tienen un desarrollo decimal periódico.

4. El rectángulo *DGHI*, el cuadrado *ABCI* y el triángulo equilátero *DEF* tienen 24 cm de perímetro cada uno de ellos. *D* es el punto medio de *IC* y *MF* es paralelo a *HG*.
a) ¿Cuál es el área de la figura sombreada de vértices *ABDFM*?
b) ¿ Cuál es el perímetro de la figura de vértices *ABCDEFGN*?



a) *AB* = 6 cm, *ID* = 3 cm, *AI* = 6 cm, *DF* = 8 cm. $S_{ABDI} = \frac{3+6}{2}\cdot 6 = 27\ \text{cm}^2$.

$S_{IDFM} = 3\cdot 8 = 24\ \text{cm}^2$. S_{TOTAL} = 27 + 24 = 51 cm^2.

b) Perímetro: $P_{ABCDEFGN}$ = 6 + 6 + 3 + 8 + 8 + 1 + 3 + 9 + 6 = 50 cm.

PRUEBA INDIVIDUAL **3º y 4º de E.S.O.** (90 minutos)

1. ¿Cuántos enteros positivos, menores que 2016, pueden escribirse como diferencia de dos cuadrados perfectos?

Probamos varios para observar alguna pauta.
$1 = 1^2 - 0^2$; $3 = 2^2 - 1^2$; $5 = 3^2 - 2^2$; $7 = 4^2 - 3^2$; $9 = 5^2 - 4^2$; $11 = 6^2 - 5^2$;… Parece que los impares.
$4 = 2^2 - 0^2$; $8 = 3^2 - 1^2$; $12 = 4^2 - 2^2$; $16 = 5^2 - 3^2$;… y los múltiplos de 4.

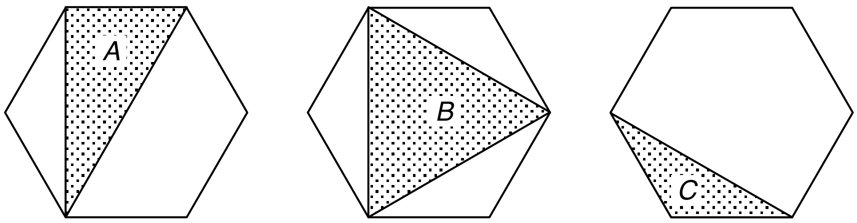
Sea $k = m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$. Como $m - n$ y $m + n$ son de la misma paridad, si $m + n$ es par entonces k es múltiplo de 4 y si $m + n$ es impar entonces k es impar.

Cualquier impar k es de la forma $k = 2a+1 = (a+1)^2 - a^2$.

Cualquier k múltiplo de 4 es de la forma $k = 4t = (t + 1)^2 - (t - 1)^2$.
Por lo tanto hay: 2016 : 2 = 1008 impares.
2016 : 4 = 504 múltiplos de 4, pero como 2016 no vale, hay 503.
En total 1008 + 503 = 1511.

2. En un hexágono regular de lado 1 consideramos los veinte triángulos cuyos vértices son vértices del hexágono. Calcula la media de las áreas de estos veinte triángulos.

Hay tres tipos de triángulos: uno rectángulo (A), otro equilátero (B) y otro obtusángulo (C).
Tipo (A). Hay 12 posibilidades, con el vértice del ángulo recto en cada uno de los 6 vértices del hexágono y el cateto menor hacia un lado o hacia el otro.
Tipo (B). Hay 2 posibilidades.
Tipo (C). Hay otras 6 posibilidades.



$$S_A = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad S_B = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4};\quad S_C = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\bar{S} = \frac{12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4} + 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}}{20} = \frac{9\sqrt{3}}{20}$$

3. Un fabricante de tres productos, de precios unitarios 50, 65 y 70 €, recibe un pedido de 100 unidades por un total de 6850 € con la condición de que envíe el máximo número posible del producto más caro. ¿Cuántas unidades de cada producto debe enviar?

Sean x, y, z el número de unidades de los productos de precio 50, 65 y 70, respectivamente. Entonces,

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ 50x+65y+70z=6850 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=100-x-z \\ 50x+65(100-x-z)+70z=6850 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=100-x-z \\ z=3x+70 \end{array}\right\}$$

Cuanto mayor sea x, mayor será z, pero si $x \geq 8$, $3x \geq 24$, $z \geq 94$ y $x + y + z \geq 100$.

Si $x = 7$ entonces $z = 91$, $y = 2$ que es la solución buscada.

4. Los cinco hermanos Pérez se llevan muy bien y han pasado un verano bastante entretenido. Cada uno de los seis días de la semana, de lunes a sábado, cuatro de ellos hacían una determinada actividad siendo 38, 35, 36, 36, 38 y 39 la suma de las edades de los cuatro. Si ninguno estuvo los seis días averigua las edades de cada uno de los cinco.

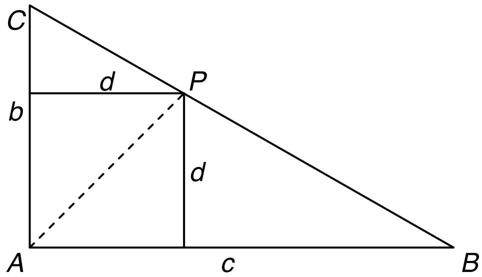
En total hay $6\cdot 4 = 24$ actividades y como ninguno hizo 6 la única posibilidad es que hicieran, 5, 5, 5, 5 y 4
Sean a, b, c, d, x las edades de los cinco hermanos, en las que x representa al que hizo 4 actividades.
$38 + 35 + 36 + 36 + 38 + 39 = 222 = 5(a + b + c + d) + 4x = 5y + 4x \Rightarrow 5y = 222 - 4x$. Luego $222 - 4x$ es múltiplo de 5.
Si $x = 3$ entonces $y = 42$ y esta suma no aparece.
Si $x = 8$ entonces $y = 38$ que aparece dos veces, los dos días que no hizo actividad el de x años.
Si $x = 13$ o mayor, entonces $y = 34$ o menor, y esta suma no aparece.

Por lo tanto $x = 8$, $a + b + c + d = 38$, y la suma de las edades de los cinco es 46.
El lunes no fue el de a años y la suma de los otros cuatro fue de 35 años, luego $a = 46 – 35 = 11$ años.
Análogamente $b = 46 – 36 = 10$ años, $c = 46 – 36 = 10$ años, $d = 46 – 39 = 7$ años.
Las edades son: 11, 10, 10, 8 y 7. Hay dos mellizos.

PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)

1. Demuestra que en cualquier triángulo rectángulo la suma de los inversos de las longitudes de los catetos es igual al inverso de la distancia del pie de la bisectriz del ángulo recto a cualquiera de los catetos.

Para relacionar c y b con d hacemos uso del área del triángulo ABC que es igual a la suma de las áreas de los triángulos ABP y ACP.



$$\frac{b\cdot c}{2} = \frac{b\cdot d}{2} + \frac{c\cdot d}{2} = \frac{d(b+c)}{2} \Rightarrow b\cdot c = d(b+c) \Rightarrow d = \frac{b\cdot c}{b+c}$$

Por lo tanto $\frac{1}{d} = \frac{b+c}{b\cdot c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ como se pretende demostrar.

2. Las ecuaciones $x^3 + Ax + 10 = 0$ y $x^3 + Bx^2 + 50 = 0$ tienen dos raíces comunes. Calcula el producto de estas dos raíces comunes.

Sean p, q, r las raíces o soluciones de la ecuación $x^3 + Ax + 10 = 0$ y p, q, s las de $x^3 + Bx^2 + 50 = 0$, es decir, $x^3 + Ax + 10 = (x – p)(x – q)(x – r) = x^3 – (p + q + r)x^2 + (pq + pr + qr)x – pqr$

$$x^3 + Bx^2 + 50 = (x – p)(x – q)(x – s) = x^3 – (p + q + s)x^2 + (pq + ps + qs)x – pqs$$

Igualando los coeficientes se obtiene: $\left.\begin{array}{r} p+q+r=0 \\ pqr=-10 \end{array}\right\}$ y $\left.\begin{array}{r} pq+ps+qs=0 \\ pqs=-50 \end{array}\right\}$

Como $p + q = – r$ y $pq + s(p + q) = 0$ entonces $pq – sr = 0$ y $pq = sr$.

$(pq)^3 = p\cdot p\cdot p\cdot q\cdot q\cdot q = (pq)(pq)(pq) = (pq)(pq)(rs) = (pqr)(pqs) = (–10)(–50) = 500 \Rightarrow pq = \sqrt[3]{500} = 5\sqrt[3]{4}$

3. En una reunión de afectados por un accidente nuclear, cada uno de los asistentes tiene 3, 4, 5, 6 ó 7 dedos en cada mano, siendo $p(k) = \frac{2^{2-|5-k|}}{10}$ la probabilidad de tener k dedos en una mano. Si el número de dedos en la mano izquierda es independiente del número de dedos en la mano derecha, calcula la probabilidad de que un asistente elegido al azar tenga al menos 10 dedos entre ambas manos.

Calculamos $p(3) = \frac{2^{2-|5-3|}}{10} = \frac{2^0}{10} = \frac{1}{10}$; $p(4) = \frac{2}{10}$; $p(5) = \frac{4}{10}$; $p(6) = \frac{2}{10}$; $p(7) = \frac{1}{10}$

Las posibilidades de tener al menos 10 dedos entre ambas manos son: (3,7); (7,3); (4,6); (6,4); (4,7); (7,4); (5,5); (5,6); (6,5); (5,7); (7,5); (6,6); (6,7); (7,6); (7,7).

Por ser independientes el número de dedos en una mano y en otra, $p(3,7) = p(3\cap 7) = p(3)\cdot p(7) = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{100}$

Agrupando los sucesos que tienen la misma probabilidad, para simplificar la expresión, se obtiene:

$$p(d \geq 10) = 2\cdot\frac{1}{100} + 2\cdot\frac{4}{100} + 2\cdot\frac{2}{100} + \frac{16}{100} + 2\cdot\frac{8}{100} + 2\cdot\frac{4}{100} + \frac{4}{100} + 2\cdot\frac{2}{100} + \frac{1}{100} = \frac{63}{100}$$

4. ¿Cuántos enteros no negativos x verifican la ecuación $\left[\frac{x}{44}\right] = \left[\frac{x}{45}\right]$?

(Recuerda: [a] es la parte entera de a, es decir, el mayor entero menor o igual que a)

Como x es un entero no negativo, $\left[\frac{x}{44}\right] = \left[\frac{x}{45}\right] = n$ es también un entero no negativo.

Si $\left[\frac{x}{44}\right] = n \Rightarrow n \leq \frac{x}{44} < n+1 \Leftrightarrow 44n \leq x < 44(n+1)$ y si $\left[\frac{x}{45}\right] = n \Rightarrow n \leq \frac{x}{45} < n+1 \Leftrightarrow 45n \leq x < 45(n+1)$

Por lo tanto $45n = 44n + n \leq x < 44(n + 1) = 44n + 44 \Rightarrow n < 44$.

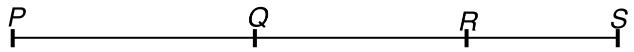
Así pues, como $\left[\frac{x}{44}\right] = n$, x puede tomar solamente $44 - n$ valores enteros diferentes y, por tanto, el número de enteros no negativos x que verifican la ecuación es:
$(44 - 0) + (44 - 1) + (44 - 2) +\ldots+ (44 - 43) = 1 + 2 + 3 +\ldots+ 44 = 990$.
Nota. Algunos valores de x son: 0, 1, 2,…, 43, 45, 46,…,87, 90, 91,…, 131, 135, 136,…, 180,…, 1935.

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

RELEVO A.-

1A.- Los puntos *P, Q, R* y *S* están alineados en ese orden. Si $PR = 15$ cm, $QS = 12$ cm y $PS = 20$ cm, calcula, en cm, la distancia entre *Q* y *R*.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)



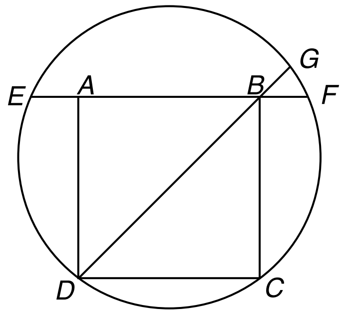
$PS - QS = PQ \Rightarrow PQ = 20 - 12 = 8$. $QR = PR - PQ = 15 - 8 = 7$.

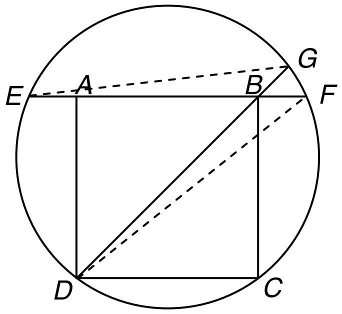
3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.
Considera los diez enteros positivos más pequeños que puedas, de forma que haya exactamente *T* divisibles entre *T*, y exactamente $T - 2$ divisibles entre $T - 2$. ¿Cuál es el mayor de los diez números?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

$T = 7$. Al haber exactamente 7 divisibles entre 7 y 5 divisibles entre 5, debe haber 7 + 5 – 10 = 2 divisibles entre 7 y 5, es decir, entre 35. Los dos más pequeños son 35 y 70.

La lista en cuestión puede ser: 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21, 25, 35, 70. El mayor de ellos es 70.

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.
En la figura adjunta observas un cuadrado *ABCD*, de lado *T*, dos de cuyos vértices, *C* y *D*, están en una circunferencia. Si la cuerda *EF* tiene longitud 98 y la cuerda *DG* pasa por *B*, calcula *BG*.
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)





Los triángulos *DBF* y *EBG* son semejantes porque tienen los tres ángulos iguales (uno por opuestos por el vértice y los otros por ser inscritos y abarcar el mismo arco). Por lo tanto sus lados son proporcionales.

$\dfrac{BE}{BD} = \dfrac{BG}{BF} \Rightarrow BG = \dfrac{BE \cdot BF}{BD}$. Como $BF = EA$, $BF = \dfrac{EF - AB}{2} = \dfrac{98 - 70}{2} = 14$

y $BE = 70 + 14 = 84$. Además $BD = 70\sqrt{2}$ de donde se deduce que:

$$BG = \frac{84 \cdot 14}{70\sqrt{2}} = \frac{84}{5\sqrt{2}} = \frac{42\sqrt{2}}{5}$$

RELEVO B.-

2B.- Hoy es el cumpleaños de tres chicos cuya suma de edades es 44 años. ¿Cuál será la suma de sus edades la próxima vez que dicha suma vuelva a ser un número con dos cifras iguales?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

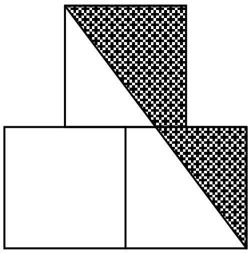
Cuando pasen *x* años la suma de sus edades será $44 + 3x$ y esta suma ha de ser múltiplo de 11 (con dos cifras iguales) $44 + 3x = 11k \Rightarrow 3x = 11(k - 4)$. El menor valor de *k* que lo verifica es $k = 7$ y la suma de las edades será $11k = 77$.

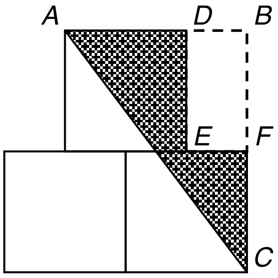
También se puede hacer tanteando 55, 66, 77 y viendo que 55 y 66 no pueden ser ya que 55 – 44 no es múltiplo de 3 y tampoco 66 – 44.

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B

En la figura adjunta se observan tres cuadrados iguales de lado $\frac{T}{7}$ cm y tal que el punto medio del lado inferior del cuadrado de arriba es un vértice de los de abajo. ¿Cuántos cm^2 tiene el área sombreada?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)





$T = 77$ y por tanto $AD = \frac{T}{7} = \frac{77}{7} = 11$

El área sombreada es igual al área del triángulo *ABC* menos el área del rectángulo *DBFE*.

$$S_{sombreada} = \frac{1}{2} AB \cdot BC - DB \cdot BF = \frac{1}{2}\left(11 + \frac{11}{2}\right) \cdot 22 - \frac{11}{2} \cdot 11 = 121$$

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B y *k* la suma de las cifras de *T*.

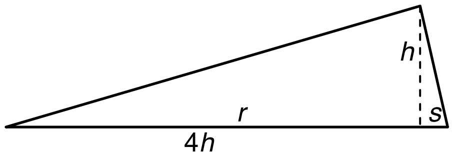
En un triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es *k* veces la longitud de la altura sobre ella. Calcula el cociente entre las longitudes del mayor y el menor de los segmentos en que dicha altura divide a la hipotenusa.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

$T = 121$ por lo que $k = 4$.

Por el teorema de la altura en un triángulo rectángulo $h^2 = r \cdot s$

Además $r + s = 4k$. Conociendo la expresión de la suma y el producto de *r* y *s*, podemos escribir una ecuación de 2º grado cuyas soluciones sean *r* y *s*.



$x^2 - 4hx + h^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{4h \pm \sqrt{16h^2 - 4h^2}}{2} = \frac{4h \pm 2h\sqrt{3}}{2} = h\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$. Por lo tanto $r = h\left(2+\sqrt{3}\right)$ y $s = h\left(2-\sqrt{3}\right)$

El cociente es $\frac{r}{s} = \frac{h\left(2+\sqrt{3}\right)}{h\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 7 + 4\sqrt{3}$.

RELEVO C.-

3C.- Si *a*, *b* y *c* son enteros positivos con $a + b + c = 7$, calcula el menor valor posible para $a^2 + b^2 + c^2$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

Si $a \leq b \leq c$, (*a, b, c*) puede ser (1, 1, 5), (1, 2, 4), (1, 3, 3) o (2, 2, 3). La suma $s^2 = a^2 + b^2 + c^2$ en cada caso es: 27, 21, 19 1 17, respectivamente, luego la menor es 17.

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

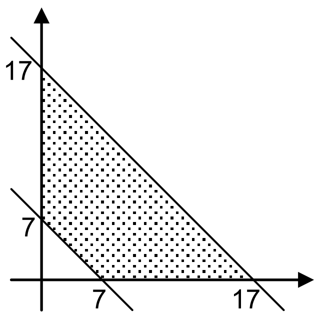
Calcula el área del trapecio limitado por los ejes de coordenadas y las rectas $x + y = T$, $x + y = T - 10$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

$T = 17$ y por lo tanto las rectas son: $x + y = 17$ y $x + y = 17$.

El área pedida es la diferencia de las áreas de dos triángulos rectángulos isósceles de la figura.

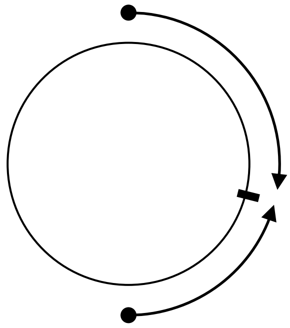
$$S = \frac{1}{2}(17 \cdot 17) - \frac{1}{2}(7 \cdot 7) = 120$$



1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C.

Isa y Alicia parten al mismo tiempo de dos puntos diametralmente opuestos de una pista circular y corren a distintas velocidades y en sentido contrario. Cuando se encuentran la primera vez Alicia ha recorrido *T* metros y, desde ese momento y hasta que se encuentran por segunda vez, Isa ha recorrido $\frac{3T}{2}$ metros. Si sus velocidades son constantes, ¿cuál es la longitud, en metros, de la pista?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



$T = 120$, $\frac{3T}{2} = \frac{3\cdot 120}{2} = 180.$

Sea L la longitud de la pista, v_A la velocidad de Alicia, v_I la velocidad de Isa, t_1 el tiempo hasta el primer encuentro, t_2 el tiempo desde el primer hasta el segundo encuentro.

$$\left.\begin{array}{l}(v_A + v_I)t_1 = \frac{L}{2} \\ (v_A + v_I)t_2 = L\end{array}\right\} \Rightarrow t_2 = 2t_1$$

$$L = v_A t_2 + v_I t_2 = v_A t_2 + 180 = 2v_A t_1 + 180 = 2\cdot 120 + 180 = 420 \text{ m}.$$